

私中・資優數學

重點整理與解題示範

看懂公式， 也看懂解題的每一步。

從數與運算到幾何、機率與邏輯，
用八大模組串起基礎到進階的準備路線。

8

大考點模組

10

道精選示範題

12

頁免費試閱

適合準備私中數學評量、希望延伸思考的國小高年級學生與家長。

翻開之前，先想一想

去程時速 60，回程時速 40。
全程平均時速是 50 嗎？

去程 60 km/h →

← 40 km/h 回程

路程相同，不代表花的時間相同。
真正要算的是「總路程 ÷ 總時間」。

第 6 頁，帶你一步一步算清楚 →

本冊，你會讀到

公式的意思與適用條件
代表題型的逐步詳解
常見誤解與答案檢查

八大模組，準備路線一次看清楚

從第一冊整理基礎，到第二冊延伸方法；下列頁碼為本試閱頁碼。

01 數感與運算結構 p.03

第一冊 位值、拆合、估算

第二冊 換位構數、尾數循環

本頁題型：從數字條件找出原數

02 因倍數與餘數 p.04

第一冊 公因數、公倍數

第二冊 輾轉相除、同餘

本頁題型：篩出同時符合限制的數

03 分數與百分率 p.05

第一冊 分數運算、比率

第二冊 連續變動、基準轉換

本頁題型：由售價反推原價與成本

04 比例、速率與工作量 p.06

第一冊 比例、單位量

第二冊 連比、工程、相對速度

本頁題型：判斷平均速度如何計算

05 數量關係與整數解 p.07

第一冊 關係式、逆推

第二冊 整數解、條件極值

本頁題型：找齊符合預算的方案

06 幾何與空間 p.08

第一冊 度量、面積、拼補

第二冊 相似、面積比、展開

本頁題型：不用求邊長也能求面積

07 資料分析與機率 p.09

第一冊 圖表、平均、可能性

第二冊 加權、反推、樣本空間

本頁題型：計算不放回抽取的機率

08 計數與邏輯 p.10

第一冊 規律、列表、排除

第二冊 排容、鴿籠、不變量

本頁題型：回答至少多少才能保證

01 | 看懂數的結構，減少試填

位值展開 → 換位差 → 條件代入

把「幾位數」拆成位值

百位為 a 、十位為 b 、個位為 c 的三位數，可以寫成下式。 a 不能是 0；每個字母都代表一個數字。

$$N = 100a + 10b + c$$

換位後，相同部分會消去

百位、個位交換後，新數為 $100c + 10b + a$ 。兩式相減，十位的 $10b$ 抵消。

$$N - \text{新數} = 99(a - c)$$

公式告訴我們什麼？

原數比新數大 396，就代表百位比個位大 $396 \div 99 = 4$ 。先找出數字的關係，能大幅減少試填。

若兩數只說「相差」，應取差的絕對值。若要求倒序後仍為三位數，原數的個位也不能是 0。

經典題型・原創示範

用三個條件鎖定原數

一個三位數的數字和為 16；十位比個位大 3。交換百位與個位後，原數比新數大 396。原數是多少？

1 先用換位差

$$99(a - c) = 396, \text{ 所以 } a = c + 4。$$

2 再寫出十位關係

$$b = c + 3。 \text{ 現在三個數字都能用 } c \text{ 表示。}$$

3 代入數字和

$$(c + 4) + (c + 3) + c = 16$$

$$3c + 7 = 16, \text{ 得到 } c = 3。$$

4 回推並驗算

$$a = 7、b = 6。7 + 6 + 3 = 16，$$

$$763 - 367 = 396， \text{ 兩個條件都符合。}$$

答案 原數為 763。

02 | 大數與餘數，都能化繁為簡

公因公倍關係 → 輾轉相除 → 多條件同餘

最大公因數與最小公倍數

對正整數 a 、 b ，令 g 為最大公因數、 L 為最小公倍數。兩數分解後，共同因數在 g 中算一次，其餘部分在 L 中補齊。

$$g \times L = a \times b$$

輾轉相除：用餘數縮小問題

若 $a = bq + r$ ，共同因數也能整除 $a - bq = r$ ，因此 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ 。算到餘數為 0，最後的非零餘數就是答案。

$$252 = 198 \times 1 + 54$$

$$198 = 54 \times 3 + 36$$

$$54 = 36 \times 1 + 18 ; 36 = 18 \times 2$$

所以 $\gcd(252, 198) = 18$ 。

同餘：把相同餘數寫得更短

$N \equiv 4 \pmod{9}$ 表示 N 除以 9 餘 4，也就是 $N = 9k + 4$ ， k 為整數。
 $\text{mod } 9$ 的意思是「以 9 為模數」。

同餘可以同加、同減、同乘；不可任意同除。例： $2 \equiv 8 \pmod{6}$ ，但 1 與 4 並不同餘。

經典題型・原創示範

多條餘數條件，逐步篩選

正整數 N 大於 100、小於 300。 N 除以 9 餘 4、除以 11 餘 7，且 N 與 84 的最大公因數大於 1。求 N 。

1 先用一個條件列式

$N = 9k + 4$ 。由範圍可得 $k = 11 \sim 32$ 。

2 用第二個條件縮小候選

$9k + 4 \equiv 7 \pmod{11}$ ，即 $9k \equiv 3$ 。

兩邊乘 5： $45k \equiv 15$ ，所以 $k \equiv 4$ 。

範圍內只有 $k = 15、26$ 。

3 算出兩個候選數

$N = 139$ 或 238 。再檢查最大公因數：

$\gcd(139, 84) = 1$ ； $\gcd(238, 84) = 14$ 。

4 回代全部條件

$238 = 9 \times 26 + 4 = 11 \times 21 + 7$ ，

且 $14 > 1$ ，範圍也符合。

答案 $N = 238$ 。

03 | 百分率，先認清比較基準

把變動翻成倍率，比記住折扣口訣更可靠。

百分率一定有比較基準

增加 25% 是在原量上加 0.25 倍；九折則保留原標價的 0.9 倍。先問「相對於哪個量」，再寫倍率。

$$\text{新量} = \text{原量} \times (1 \pm \text{變動率})$$

連續變動，要連乘倍率

第二次變動用的是第一次變動後的量。因此先漲 20%、再降 20%，倍率是 $1.2 \times 0.8 = 0.96$ ，最後反而少了 4%。

$$\text{最終量} = \text{原量} \times \text{倍率}_1 \times \text{倍率}_2$$

倒推原量，把倍率除回去

若已知最後的量，沿著變動順序逆推；也可以一次除以所有倍率的乘積。

$$\text{原量} = \text{最終量} \div (\text{倍率}_1 \times \text{倍率}_2)$$

「利潤率」要先講清楚分母。本頁以成本為基準：利潤率 = (售價 - 成本) ÷ 成本。

經典題型・原創示範

打折出售，仍然有利潤嗎？

商店把商品按成本加價 25% 定價，再按定價打九折出售，售價為 540 元。求成本與以成本為基準的利潤率。

1 把兩次變動接起來

設成本為 C：

$$\text{定價} = 1.25C ; \text{售價} = 1.25C \times 0.9。$$

2 由售價反推成本

$$1.125C = 540，$$

$$C = 540 \div 1.125 = 480。$$

3 利潤除以正確基準

$$\text{利潤} = 540 - 480 = 60 \text{ 元}。$$

$$60 \div 480 = 0.125 = 12.5\%。$$

4 檢查整段流程

$$480 \times 1.25 = 600 \text{ 元}；$$

$$600 \times 0.9 = 540 \text{ 元，符合售價}。$$

答案 成本 480 元；利潤率 12.5%。

04 | 平均速率，要把時間算進來

先用「總量 ÷ 總時間」理解，再使用快捷公式。

速率是「每單位時間的路程」

路程 = 速率 × 時間。處理多段行程時，各段的速率可能不同，必須分別算時間，再把路程與時間加總。

$$\text{平均速率} = \text{總路程} \div \text{總時間}$$

等距往返，為何不能直接平均？

慢的那一段花較多時間，對全程平均的影響也較大。只有兩段時間相等時，才能直接取兩個速率的算術平均。

$$\text{等距兩段：平均速率} = 2uv \div (u + v)$$

每段路程設為 d ，總時間為 $d/u + d/v$ 。用 $2d$ 除以總時間，就得到上式； u 、 v 必須使用相同單位。

同樣的想法，也能處理工程

把總工作量設為 1。甲單獨 a 天完成，每天做 $1/a$ ；乙每天做 $1/b$ 。效率固定、合作互不干擾時，每天完成 $1/a + 1/b$ 。

平均速率若「包含停留」，分母要加入停留時間；路程不變。

經典題型・原創示範

往返相同路程的平均速率

甲地到乙地 60 公里。去程時速 60 公里，回程時速 40 公里，途中不休息。全程平均時速是多少？

1 分段計算時間

路段	路程	時間
去程	60 公里	$60 \div 60 = 1$ 時
回程	60 公里	$60 \div 40 = 1.5$ 時

2 加總路程與時間

總路程 = $60 + 60 = 120$ 公里。

總時間 = $1 + 1.5 = 2.5$ 小時。

3 求全程平均

$120 \div 2.5 = 48$ 公里／時。

4 檢查答案合理性

48 介於 40 與 60 之間，而且低於 50；因為時速 40 的路段花了較多時間。

答案 平均時速為 48 公里。

05 | 先找整數範圍，再列全部方案

等量關係 → 差額代換 → 整數篩選

數量只能是整數，不能只解方程

買幾本書、分幾組人，都不能出現半個答案。先找等量關係，再用整數、範圍與總數等條件篩選。

$$ax + by = \text{總金額}$$

a 、 b 是單價， x 、 y 是數量；是否允許 0，必須看題目要求。若至少各買一件，便有 $x \geq 1$ 、 $y \geq 1$ 。

固定總件數，減少一個未知數

若共買 n 件，可寫成 $x = n - y$ ，代回總金額：

$$\begin{aligned} \text{總金額} &= a(n - y) + by \\ &= an + (b - a)y \end{aligned}$$

這也等於「先假設全買便宜的，再逐件換成貴的」。每換一件，金額固定增加 $b - a$ 。

有上下限，先圈出可行範圍

預算區間會變成 y 的上下限；最後只保留整數，逐一回查總件數。

題目問「全部方案」，只寫一組可行答案不夠。要說明為何區間外的數都不符合。

經典題型・原創示範

預算限制下，有幾種買法？

12 元與 17 元筆記本共買 20 本，總金額至少 260 元、不超過 290 元。列出全部購買組合。

1 先假設全買便宜的

$20 \times 12 = 240$ 元。設 17 元的買 y 本。

2 用差額寫出金額

每換一本多 5 元，所以總價 $= 240 + 5y$ 。
 $260 \leq 240 + 5y \leq 290$ 。

3 求整數範圍並列全

$20 \leq 5y \leq 50$ ，所以 $y = 4, 5, \dots, 10$ 。

17 元本數	4	5	6	7	8	9	10
12 元本數	16	15	14	13	12	11	10

4 確認沒有漏解

少於 4 本時不足 260 元；多於 10 本時超過 290 元。表內每組總數都是 20。

答案 共有 7 種，組合如表。

06 | 圖形看關係，面積不用硬算

同高面積比 → 分段比例 → 兩次縮小

同高三角形，面積跟著底邊變

三角形面積為底 $\times$ 高 $\div 2$ 。如果兩個三角形的高相同，約去共同的高與 $1/2$ ，就得到面積比＝底邊比。

$$\text{同高時：} S_1 : S_2 = b_1 : b_2$$

兩條邊各取一部分，面積怎麼變？

D 在 AB 上、E 在 AC 上時，先比較 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ABC$ ，再比較 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ADC$ ；兩次都可用同高的面積比。

$$S_{ADE} / S_{ABC} = (AD / AB) \times (AE / AC)$$

相似圖形，面積比是長度比的平方

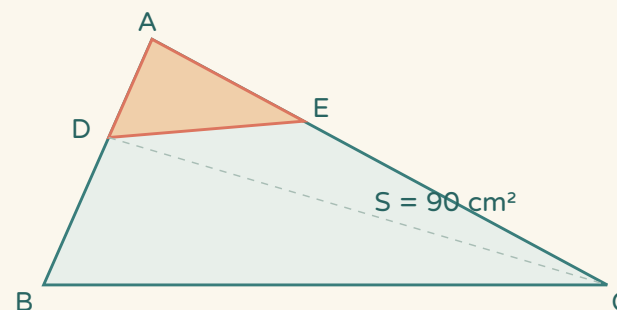
若圖形整體等比例放大 k 倍，底與高都變 k 倍，面積就變 k^2 倍。前提是兩個圖形確實相似。

AD:DB=2:3 時，AD/AB=2/5。分母是「整條 AB」，不能直接用 2/3。

經典題型・原創示範

不求邊長，直接求小三角形面積

$\triangle ABC$ 面積為 90 平方公分。D 在 AB 上，AD:DB=2:3；E 在 AC 上，AE:EC=1:2。求 $\triangle ADE$ 面積。



- 1 先把分段比換成全長比
AD/AB=2/5，AE/AC=1/3。
- 2 第一個同高面積比
 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ABC$ 以 AB 上的線段為底，高相同，所以 $S_{ADC}=90 \times 2/5=36$ 。
- 3 第二個同高面積比
 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ADC$ 以 AC 上的線段為底，高相同，所以 $S_{ADE}=36 \times 1/3=12$ 。

答案 12 平方公分；小於原面積，合理。

07 | 看清總量，也看清每一種可能

加權平均 → 抽取路徑 → 機率驗算

平均數，先還原成總量

兩組人數不同，不能直接平均兩組的平均數。先用「平均 $\times$ 人數」還原總量，再除以合計人數。

$$\text{合併平均} = (n_1m_1 + n_2m_2) \div (n_1 + n_2)$$

n 表示人數， m 表示各組平均。例如 10 人平均 80、20 人平均 86，合併平均是 $(800 + 1720) \div 30 = 84$ 。

機率，先弄清楚所有可能

等可能的結果才能用「符合結果數 $\div$ 所有結果數」。抽球若不放回，第二次的球數與顏色組成會改變。

$$\begin{aligned} \text{某一路徑機率} &= \text{第一步機率} \\ &\times \text{該情況下第二步機率} \end{aligned}$$

「至少一次」可從反面想

若事件與它的反面涵蓋全部結果，且不會同時發生，兩者機率和為 1。

$$\text{至少一次成功} = 1 - \text{一次也沒成功}$$

兩條路徑的機率能直接相加，是因為它們互斥：同一回抽取不會同時是「紅紅」又是「藍藍」。

經典題型・原創示範

不放回抽兩球，同色機率是多少？

袋中有 3 顆紅球、2 顆藍球。每顆球被抽中的機會相同，抽出後不放回，連抽兩顆。求兩顆同色的機率。

1 把同色分成兩條路徑

同色 = 紅紅，或藍藍。這兩種情況不重疊。

紅紅 先紅 $3/5$ → 再紅 $2/4$

藍藍 先藍 $2/5$ → 再藍 $1/4$

2 每條路徑分別相乘

$$P(\text{紅紅}) = 3/5 \times 2/4 = 3/10。$$

$$P(\text{藍藍}) = 2/5 \times 1/4 = 1/10。$$

3 把互斥情況相加

$$P(\text{同色}) = 3/10 + 1/10 = 2/5。$$

4 用另一種計數驗算

5 顆中選 2 顆有 10 種不同配對；

紅紅有 3 種，藍藍有 1 種， $(3 + 1)/10 = 2/5$ 。

答案 同色機率為 $2/5$ ，即 40%。

08 | 「保證」兩個字，藏著分類策略

乘法計數 → 排除重複 → 設計鴿籠

分步選擇，用乘法原理

如果第一步有 a 種選擇，而且每種選擇後第二步都有 b 種，就有 $a \times b$ 種完整結果。有禁止條件時，需先分類再計數。

完整結果數 = 第一步選法 $\times$ 第二步選法

兩群有重疊，用排容原理

先把兩群人數相加，重疊的人會被算兩次，因此減去一次。例：30 人學游泳、22 人學球類，8 人兩者都學，至少學一種的有 44 人。

至少屬於一群 = A 群 + B 群 - 重疊

要求「保證」，用鴿籠原理

把物件分到 k 個盒子，放入 $k+1$ 個物件，至少有一盒有 2 個。解題的關鍵是設計盒子，讓同盒的兩個物件正好符合題意。

k 個盒子裝 $k+1$ 個物件
⇒ 至少一盒裝了 2 個

「至少多少才保證」要做兩件事：證明這個數量一定成功，再舉例說明少一個仍可能失敗。

經典題型・原創示範

抽到一對和為 21 的數

從 1 到 20 的整數卡片中，任意抽取不同卡片。至少要抽幾張，才能保證其中有兩張的數字和為 21？

1 依目標設計 10 個盒子

把卡片分成：

(1,20)、(2,19)、(3,18)、 $\dots$ 、(10,11)。

每盒的兩張卡片和都等於 21。

2 先想怎樣可以一直避開

每盒只拿一張，最多可拿 10 張，

仍不會拿到同盒的一對。

3 第 11 張一定造成同盒

11 張卡片放在 10 個盒子，至少一盒有

兩張，因此一定有一對數字和為 21。

4 證明 10 張還不保證

只抽 1~10，就沒有兩張和為 21。

所以不能把答案降成 10。

答案 至少抽 11 張。

自己試一次，把方法帶到新題目

先遮住下方解答。卡住時，回看第 4 頁或第 8 頁的公式說明。

經典題型・原創示範

挑戰 A | 把兩個餘數條件接起來

正整數 N 大於 100、小於 200；除以 6 餘 2、除以 9 餘 5，而且是 7 的倍數。求 N 。

先試 3 分鐘，寫下第一個關係式。

完成後，再往下核對

1 把餘數變成整除

$N+4$ 同時能被 6、9 整除，
所以 $N+4$ 是 $\text{lcm}(6,9)=18$ 的倍數。

2 利用範圍列全候選

$N=18k-4$ 。範圍內的候選為
104、122、140、158、176、194。

3 用最後條件篩選並驗算

只有 140 是 7 的倍數。
 $140=6\times 23+2=9\times 15+5=7\times 20$ 。

答案 $N=140$ 。

經典題型・原創示範

挑戰 B | 長度比，如何變成面積差？

兩個相似三角形的對應邊長比為 3:5，大三角形比小三角形多 64 平方公分。小三角形面積是多少？

先試 3 分鐘，畫出面積份數。

完成後，再往下核對

1 先把長度比平方

因為兩三角形相似，面積比為
 $3^2:5^2=9:25$ 。

2 由差值求一份

大比小多 $25-9=16$ 份。
16 份是 64，所以每份為 4 平方公分。

3 求面積並驗算

小面積 $=9\times 4=36$ ；大面積 $=25\times 4=100$ 。
 $100-36=64$ ，符合題意。

答案 小三角形面積為 36 平方公分。

把下一步，安排在適合孩子的位置

先整理基礎，再延伸策略；依目前程度選擇起點。

第一冊・整理基礎與完整練習

數學思維進階講義

適合需要整理考點、建立練習習慣，或希望先找出能力缺口的學生。

從八大模組出發，搭配診斷、單元練習、混合與限時模擬，逐步熟悉題目的條件與問法。

第二冊・延伸方法與策略挑戰

數學考題加強講義

適合第一冊已完成，或想再挑戰進階方法與整合問題的學生。

延伸至輾轉相除、同餘、整數解、相似與計數策略，練習選擇方法、處理限制與檢查答案。

閱讀範圍說明

本試閱為重新編寫的精華導讀，特別附有逐步詳解。兩冊完整版以觀念、練習與答案索引為主，不提供逐題詳解。

把這份理解，接到持續練習

查看完整版講義



到無界學堂商店查看商品介紹、
上架版本與購買方式。

前往商品頁 →

想知道孩子適合從哪裡開始？

課程由我親自接洽、親自授課。可以先告訴我孩子的年級、目前程度與準備目標，我們再討論適合的練習與上課安排。



詢問課程與學習安排 →

無界學堂・無尾熊老師